

2019年安徽省中小学新任教师公开招聘考试

中学数学真题及答案

一、单选

1. 已知全集 $U = R$ ，集合 $P = \{y | y = \sqrt{x-1}\}$ ， $\complement_U P =$ ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, 0]$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, 1]$

1.A 【解析】由题意， $y = \sqrt{x-1} \geq 0$ ，故 $P = \{y | y \geq 0\}$ ， $\complement_U P = (-\infty, 0)$ ，故选 A.

2. 若 a, b 均为单位向量，且 $a \cdot b = 1/4$ ，则 $|3a + 2b|$ 的值为 ()

- A. $\sqrt{13}$ B. 4 C. 5 D. 16

2.B 【解析】由题意， $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 + 4 + 12 \times \frac{1}{4} = 16$ ，故 $|3\vec{a} + 2\vec{b}| = 4$ ，故选 B.

3. 已知无理数 $\sqrt{26 + \sqrt{660}}$ 可被改写成 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ，其中 a, b 是整数，且 $a > b$ ，则 $a - b$ 的值是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3.D 【解析】 $(\sqrt{26 + \sqrt{660}})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ ， $\sqrt{26 + \sqrt{660}} = a + b + 2\sqrt{ab}$ ，可得 $a + b = 26$ ， $ab = 165$. 所以 $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 16$ ，故 $a - b = 4$.

4. 袋中有 6 个大小相同的乒乓球，其中 3 个为橙色，3 个为白色，现从中随机抽取两个，则取出的两个颜色相同的概率 ()

- A. 2/15 B. 1/5 C. 1/3 D. 2/5

4.D 【解析】由题意， $P = \frac{C_3^2 + C_3^2}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ ，故选 D.

5. 记函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$ ，若 $f(x) = \log_3 x$ ，则 $f^{-1}(-1) =$ ()

- A. -3 B. -1/3 C. 1/3 D. 3

5.C 【解析】 $f(x) = \log_3 x$ ， $f^{-1}(x) = 3^x$ ， $f^{-1}(-1) = \frac{1}{3}$ ，故选 C.

6. 为了得到 $y = \tan(2x - \pi/3)$ 的图像沿 x 轴 ()

- A. 向左平行移动 $\pi/6$ 个单位长度

- B.向右平行移动 $\pi/6$ 个单位长度
- C.向左平行移动 $\pi/3$ 个单位长度
- D.向右平行移动 $\pi/3$ 个单位长度

6.A 【解析】 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $y = \tan\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3}\right] = \tan 2x$,

故选 A.

7. 设集合 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, 则满足 $f(f(x)) = x$ 的映射 $f: S \rightarrow S$ 的个数是 ()

- A.13 B.12 C.11 D.10

8. 《普通高中教学课程标准（2011年版）》指出高中数学课程是义务教育后普通高级中学的主要课程，具有 ()

- A.基础性，发展性，创新性
- B.基础性，普及性，发展性
- C.基础性，选择性，发展性
- D.基础性，实践性，发展性

9. 《普通高中课程标准（2011年版）》从数学思考方面阐述课程总目标时提出学会独立思考，体会数学的基本思想和 ()

- A.基本活动经验
- B.思维要求
- C.基本过程
- D.基本方法

10. 《义务教育教学课程标准（2011版）》在实施建议中指出：现代信息技术的作用不能完全替代原有经验的教学手段，其真正价值在于实现原有的教学手段难以达到甚至达不到的效果，下列采用信息技术的方式，不符合上述实施建议的是 ()

- A.利用计算机展示教学内容，节约教师板书时间
- B.利用计算机展示函数图像，几何图形运动的变化过程
- C.从数据库中获取数据，绘制合适的统计图表
- D.利用计算机的随机模拟效果，引导学生更好地理解随机事件以及随机事件发生的概率

二、填空题

11. 设函数 $f(x) = 4^x - 2^{1+x} - 8$ ，则 $A = \{x \in (-4, 4) \mid f(x) > 0\}$ 的区间长度是_____.

12. 计算 $\begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ _____.

13. 在极坐标系中。若点 P 的坐标为 $(8, \pi/2)$ ，点 A 在曲线 $\rho = 2\sqrt{2} \cos(\theta - \pi/4)$ 上，则 $|AP|$ 的最小值为_____.

14. 求值 $\int_1^e x \ln x dx =$ _____.

15. 《义务教育学课程标准（2011年版）》指出，在义务教育阶段，“统计与概率”的主要内容有_____.

- ①收集，整理和描述数据，包括简单抽样，整理调查数据，绘制统计图表等
- ②处理数据，包括计算平均数，中位数，众数方差等
- ③从数据中提取信息并进行简单推断
- ④对推断结果进行检验
- ⑤简单随机事件及其发生的概率

11.2【解析】 $f(x) = 4^x - 2^{1+x} - 8 = (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8 = (2^x - 4)(2^x + 2)$ ， $f(x) > 0$ ，则 $2^x > 4$ 或 $2^x < -2$ ，可得 $x > 2$ ，区间长度为 $4 - 2 = 2$.

12.1【解析】 $\begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

13. $4\sqrt{2}$ 【解析】由 $\rho = 2\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ 可得 $\rho^2 = 2\rho \cos \theta + 2\rho \sin \theta$ ，故曲线为 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ ，即 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ ，是以 $C(1,1)$ 为圆心， $\sqrt{2}$ 为半径的圆.

在极坐标中点 P 的坐标为 $\left(8, \frac{\pi}{2}\right)$ ，可得 $P(0,8)$ ， $|AP|$ 的最小值为

$|PC| - r = \sqrt{7^2 + 1^2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

14. $\frac{e^2 + 1}{4}$ 【解 析】

$$\int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \ln x d \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x \bigg|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \bigg|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

15.①②③⑤ 【解析】略.

三、简答题

16.已知数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=1$ 的等比数列，且 $a_2+a_3=6$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(II) 若数列 $\{a_n\}$ 为正向数列，设 $b_n = \log_2 a_n + 1$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

16.【解析】(1) 由题意， $a_2+a_3=a_1q+a_1q^2=6$,

所以 $q^2+q-6=0$ ，解得 $q=-3$ 或 $q=2$.

所以 $a_n=2^{n-1}$ 或 $a_n=(-3)^{n-1}$.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 是正项数列，所以 $a_n=2^{n-1}$,

$$b_n = a_n + \log_2 a_n + 1 = a_n + n = 2^{n-1} + n,$$

$$\text{所以 } S_n = 1+2+2^2+\cdots+2^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1-2^n}{1-2} + \frac{n^2+n}{2} = 2^n + \frac{n^2+n-2}{2}.$$

17.如图，在棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp BC$ ， $AB=4$ ， $BC=CD=PC=PD=2$

(I) 设点 E 为 PA 中点，求证 $DE \parallel$ 平面 PBC .

【解析】(1) 取 PB 的中点 M ，连接 EM ， CM .

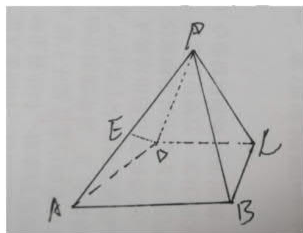
EM 为 $\triangle PAB$ 的中位线，则 $EM \parallel \frac{1}{2}AB$ ，故 $EM \parallel CD$.

则四边形 $EMCD$ 为平行四边形，所以 $ED \parallel CM$.

又因为 $ED \not\subset$ 平面 PBC ， $CM \subset$ 平面 PBC ，

所以 $DE \parallel$ 平面 PBC .

(II) 求直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成角 α 的正弦值



(2) 如图，取 DC 的中点 N ，连接 PN ， AN 。

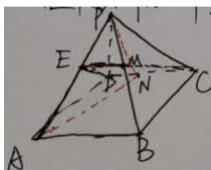
因为 PDC 为等边三角形，所以 $PN \perp DC$ 。

又因为平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PN \perp$ 平面 $ABCD$ ，

则 $\angle PAN$ 为 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角。

由 $PN \perp$ 平面 $ABCD$ ，可知 $PN \perp AN$ 。



又 $PN = \sqrt{3}$ ， $AN = \sqrt{13}$ ，

在 $Rt\triangle PAN$ 中， $PA = \sqrt{16} = 4$ ，

$$\sin \angle PAN = \frac{PN}{PA} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

18. 设函数 $f(x) = (ax^2 - 3x + 5)e^x$ ， $a \in R$

(I) 当 $a = 5$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值点。

【解析】(1) 由题意， $f(x) = (5x^2 - 3x + 5)e^x$ ，

则 $f'(x) = (5x^2 - 7x + 2)e^x = (x+1)(5x+2)e^x$ 。

令 $f'(x) = 0$ ，可得 $x = -1$ 或 $x = -\frac{2}{5}$ 。

当 $x < -1$ 时 $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，

当 $-1 < x < -\frac{2}{5}$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，

当 $x > -\frac{2}{5}$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增.

故 $x = -1$ 为极大值点， $x = -\frac{2}{5}$ 为极小值点.

$$f(-1) = 13e^{-1}, \quad f\left(-\frac{2}{5}\right) = 7e^{-\frac{2}{3}}.$$

故极大值点为 $(-1, 13e^{-1})$ ，极小值点为 $\left(-\frac{2}{5}, 7e^{-\frac{2}{3}}\right)$.

(II) 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调函数，求 a 的取值范围.

由题意， $f(x) = (ax^2 - 3x + 5)e^x$ ， $f'(x) = [ax^2 - (2a-3)x + 2]e^x$.

令 $h(x) = ax^2 - (2a-3)x + 2$ ，则 $h(x) > 0$ 或 $h(x) < 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立.

① 若 $h(x) > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = [-(2a-3)]^2 - 8a < 0, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2} < a < \frac{9}{2}$.

② 若 $h(x) < 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 $\begin{cases} a < 0, \\ \Delta = [-(2a-3)]^2 - 8a < 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a < 0, \\ \frac{1}{2} < a < \frac{9}{2}, \end{cases}$ 此时无解.

综上， a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

19. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，直线 $y = x$ 与抛物线 C 交于点原点 O 与点 P .

(I) 若三角形 OPF 的面积为 2，求抛物线 C 的方程.

【解析】(1) 由题意，联立 $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = x \end{cases}$ 可得 $x = 2p$.

故 $P(2p, 2p)$ ，且 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

所以 $S_{\triangle OPF} = \frac{1}{2} \times \frac{p}{2} \times 2p = \frac{1}{2} p^2 = 2$ ，解得 $p = 2$.

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

(II) 作直线 OP 的平行线 l ，若直线 l 与抛物线 C 交于点 A, B ，设线段 OP, AB

的中点，分别为 M ， N 。求证 MN 平行与 x 轴。

(2) 设直线 AB 的方程为 $y = x + m$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = x + m \end{cases} \text{ 可得 } y^2 - 2py + 2pm = 0.$$

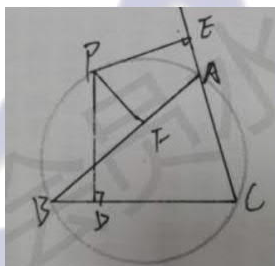
$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } N_y = \frac{y_1 + y_2}{2} = p.$$

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = x \end{cases} \text{ 可得 } y^2 - 2py = 0,$$

$$\text{则 } y_1 = 0, y_2 = 2p. M_y = p.$$

因为 $M_y = N_y$ ，所以 MN 平行于 x 轴。

20. 如图，设点 P 是三角形 ABC 的外接圆上任意一点，过点 P 作 BA ， BC ， CA ， CB ，所以直线的垂线，垂足分别为 D ， E ， F 三点共线。



【解析】证明：如图，连接 PA ， PC ，

因为 $PE \perp AE$ ， $PF \perp AF$ ，故 A 、 E 、 P 、 F 四点共圆。

所以 $\angle PEF = \angle PAF$ 。（同弧所对的圆周角相等）

因为 $\angle PAF = \angle PAB = \angle PCD = \angle PCB$ ，

所以 $\angle PEF = \angle PCD$ 。

又因为 $PE \perp EC$ ， $PD \perp DC$ ，故 P 、 E 、 C 、 F 四点共圆。

所以 $\angle PED = \angle PCD$ ，所以 $\angle PEF = \angle PED$ 。

故 D 、 E 、 F 三点共线。

21. 案例分析

某教材“实教”部分教学内容选择了素材编排如下

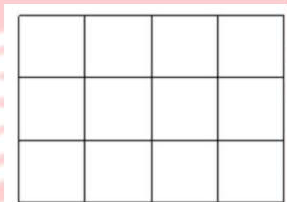
素材以及编排

思考

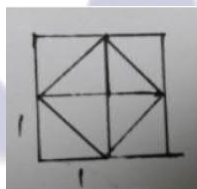
20个点（称为格点）中，我们可以选择4个格点作为顶点连成一个正方形，叫做格点正方形，你能找出多少种面积互不相同的格点正方形？

（1）有面积分别为1，4，9的正方形吗？

（2）有面积是2的格点正方形吗？把它画出来（另：还有与这些面积不相同的格点正方形吗？）



我们看到四个边长为1的相邻正方形的对角线就围成一个面积为2的格点正方形。这种正方形的边长应是多少？



设这种正方形的边长为 x ，则 $x^2 = 2$ ，因为 $x > 0$ ，所以 $x = \sqrt{2}$ 。

（I）试分析上述素材及其编排的意图？

（II）在素材的呈现上，教材体现的特点是什么？

22.教学设计

依据《义务教育课程标准（2011年版）》课程设计和素材，撰写一份侧重数学建模素养培养的教学过程设计（只要求写出教学过程）

《义务教育课程标准（2011年版）》在课程设计中指出，模型思想的建立是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径，建立和求解模型的过程包括：从现实生活或具体情境中抽象出数学问题用数学符号建立方程，不等式，函数等表示数学问题中的数量关系和变化规律，求出结果并讨论结果的意义，这些内容的学习有助于学生初步形成模型思想，提高学习数学的兴趣和应用意识。

素材脚长与脚号对应表如下

脚 长	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265
a_n / mm										
脚 号	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
b_n / mm										

(I) 找出满足表 I 中对应规律的计算公式，通过实际脚长 a ，计算出鞋号 b

(II) 根据计算公式，计算30号的童鞋所对应的脚长是多少？

(III) 如果一个篮球运动员脚长282mm，根据计算公式，他应该穿多大号的鞋？

A.B.C.D.

A.B.C.D.

A.B.C.D.

A.B.C.D.

A.B.C.D.

A.B.C.D.

A.B.C.D.